

**PENGARUH MASKER KESEHATAN DAN VAKSINASI
TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT MERS-COV
MENGUNAKAN MODEL MATEMATIKA**



OLEH:

Dimas Alfarisyi, M.Pd.

Rosmaya, M.Pd.

Indri Kurnia, M.Pd.

Fatikhatul Umami

Khoirul Hidayah

**LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN
MASYARAKAT (LP2M)
INSTITUT AGAMA ISLAM DARUL A'MAL LAMPUNG
2022**

HALAMAN PENGESAHAN

- A. Judul Program : Pengaruh Masker Kesehatan dan Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit MERS-CoV Menggunakan Model Matematika
- B. Jenis program : Pendampingan
- C. Sifat kegiatan : Terprogram
- D. Identitas pelaksana :
1. Ketua
 - Nama : **Dimas Alfarisyi, M.Pd / Ketua**
 - NIDN : 2119049501
 - Pangkat/ golongan :
 - Alamat kantor : Jl. Pesantren Mulyojati 16B Kec. Metro Barat Kota Metro
 2. Anggota 1
 - Nama : **Rosmaya, M.Pd**
 - NPM : 2112099303
 - Alamat kantor : Jl. Pesantren Mulyojati 16B Kec. Metro Barat Kota Metro
 3. Anggota 2
 - Nama : **Indri Kurnia, M.Pd**
 - Alamat kantor : Jl. Pesantren Mulyojati 16B Kec. Metro Barat Kota Metro
 4. Anggota 3
 - Nama : **Fatikhatul Umami**
 - Alamat kantor : Jl. Pesantren Mulyojati 16B Kec. Metro Barat Kota Metro
 5. Anggota 4
 - Nama : **Khoirul Hidayah**
 - Alamat kantor : Jl. Pesantren Mulyojati 16B Kec. Metro Barat Kota Metro
- E. Biaya yang diperlukan : Rp.10.000.000 (Sepuluh juta rupiah)
- F. Lama kegiatan : 1 bulan

PERNYATAAN KEASLIAN DAN KEORISINILAN

Dengan ini saya sebagai ketua peneliti:

Nama : Dimas Alfarisyi, M.Pd
NIDN : 2119049501

Menyatakan bahwa penelitian ini adalah orisinil yang belum diteliti sebelumnya dan naskah penelitian ini secara keseluruhan adalah asli penelitian/ karya saya sendiri kecuali pada bagian-bagian yang di rujuk sumbernya.

Metro, 13 Mei 2022
Saya yang menyatakan,



Dimas Alfarisyi, M.Pd
NIDN. 2119049501

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadapan Allah swt., yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahnya sehingga penelitian kolektif dosen dan mahasiswa tentang “*Pengaruh Masker Kesehatan Dan Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit MERS-Cov Menggunakan Model Matematika*” ini berjalan lancar.

pada kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dan men-support selama penelitian ini dilaksanakan. secara khusus peneliti menyampaikan terima kasih kepada :

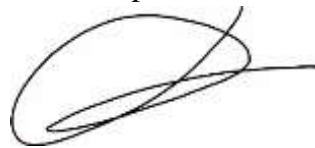
1. Kementerian Agama Republik Indonesia
2. Kopertais wilayah XV Lampung
3. Dekan Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan IAI Darul A'mal Lampung
4. Kepala Pusat Penelitian Dan Pengabdian Kepada Masyarakat IAI Darul A'mal Lampung.
5. Semua pihak yang terlibat aktif dalam proses penelitian ini.

Semoga semua dukungan dan kontribusi mereka bermanfaat bagi umat dan mendapatkan balasan yang sesuai dari Allah swt. kami berharap, kedepan kerja sama dan kontribusi serta dorongan tersebut semakin meningkat, sehingga akan meningkatkan kualitas dan kuantitas penelitian di lingkungan Masyarakat IAI Darul A'mal Lampung.

Semoga penelitian ini dapat menjadi sumbangan yang bermanfaat bagi pembangunan iklim akademik yang kondusif di Masyarakat IAI Darul A'mal Lampung lebih dari itu, penelitian ini kiranya menjadi kontribusi positif bagi terciptanya sumber daya manusia yang mumpuni untuk membangun bangsa dan agama.

Peneliti mengharapkan kritik dan saran yang konstruktif guna perbaikan dan penyempurnaan untuk penelitian-penelitian berikutnya.

Metro, 14 Mei 2022
Ketua tim peneliti,



Dimas Alfarisyi, M.Pd
NIDN. 2119049501

ABSTRAK

Penelitian ini mengembangkan model penyebaran penyakit MERS-CoV menggunakan model SEIR yang ditambahkan faktor penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi sebagai upaya pencegahan. Populasi dibagi menjadi enam subpopulasi yaitu subpopulasi rentan tidak menggunakan masker kesehatan dan menggunakan masker kesehatan, subpopulasi laten, subpopulasi terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan dan menggunakan masker kesehatan, serta subpopulasi sembuh. Hasilnya diperoleh dua buah titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit menggunakan linearisasi disekitar titik ekuilibrium. Hasilnya, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, artinya penyakit akan menghilang setelah jangka waktu tertentu. Simulasi numerik model untuk penyakit MERS-CoV yang dilakukan sejalan dengan analisis perilaku model.

Kata Kunci: MERS-CoV, Model SEIR, Kestabilan Titik Ekuilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar

DAFTAR ISI

Halaman Sampul	1
Halaman Pengesahan	2
Pernyataan Keaslian.....	3
Kata Pengantar	4
Abstrak	5
Daftar Isi	6
A. Pendahuluan.....	7
B. Tinjauan Pustaka.....	11
C. Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Penggunaan Masker kesehatan dan Vaksinasi.....	26
D. Hasil DAN Simulasi Model	48
E. Penutup	58
Daftar Pustaka	

A. Latar Belakang

Penyakit menular merupakan penyakit yang disebabkan oleh mikroorganisme patogen, seperti bakteri, virus parasit atau jamur. Penyakit ini dapat menyebar baik secara langsung maupun tidak langsung [1]. Hingga saat ini banyak penyakit menular yang mewabah di dunia, seperti influenza, difteri, koleradan lain sebagainya. Salah satu virus yang menyebabkan penyakit menular adalah virus korona. Virus korona menyebabkan penyakit *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS) yang mewabah pada tahun 2003. Lalu pada tahun 2012, penyakit baru yang disebabkan oleh virus korona ditemukan yaitu *Middle East Respiratory Syndrome-Corona Virus* (MERS-CoV) [2].

MERS-CoV adalah penyakit sindrom pernapasan yang disebabkan oleh virus korona yang menyerang saluran pernapasan dari yang ringan hingga berat. Gejalanya adalah batuk, demam, dan sesak napas, bersifat akut dan biasanya pasien memiliki penyakit komorbid (penyakit penyerta) seperti diabetes, penyakit jantung kronik, hipertensi, dan penyakit paru kronik, sehingga dapat menyebabkan kematian bagi penderitanya [3]. Berdasarkan informasi yang dipublikasikan oleh *World Health Organization* (WHO) sejak pertama kali dilaporkannya penyakit MERS-CoV pada bulan April 2012 sampai akhir Agustus 2019, sebanyak 2464 laboratorium telah mengkonfirmasi kasus MERS-CoV dengan jumlah kematian sebanyak 850 individu atau 34.5% dari 27 negara dimanasebanyak 2073 kasus atau 84% dilaporkan dari Arab Saudi dengan jumlah kematian sebanyak 772 individu atau 37.24% [4].

“Dari Usamah Bin Zaid RA dari Nabi SAW yang bersabda: Jika kalian mendengar ada wabah di suatu daerah, maka jangan memasuki daerah tersebut. Dan, jika wabah terjadi di suatu daerah sedangkan kalian sedang berada didalamnya, jangan keluar dari daerah tersebut.” (HR. Bukhari dan Muslim) Berdasarkan hadits diatas, langkah pencegahan untuk menanggulangi penyebaran wabah penyakit adalah dengan melakukan karantina terhadap daerah yang terkena wabah tersebut, yaitu dengan melarang penduduk daerah lain yang tidak terkena penyakit untuk memasukinya. Namun, jika kita diharuskan untuk mengunjungi daerah yang terkena wabah penyakit, salah satu upaya pencegahan penyakit menular tertentu dapat dilakukan melalui vaksinasi sebelum mengunjungi daerah tersebut dan dengan menggunakan masker kesehatan. Penjagaan diri pada waktu sehat, lebih baik daripada pengobatan pada waktu sakit.

Penelitian oleh [5] yang dilakukan di negara-negara semenanjung Arab menyebutkan bahwa virus MERS-CoV dideteksi pada unta dan kelelawar. Akan tetapi, virus ini tidak ditemukan di hewan-hewan domestik seperti kuda, sapi, kerbau, kambing, ayam dan burung. Transmisi penyebaran virus ini dibagi menjadi tiga bagian. Pertama penyebaran virus antar hewan yakni unta dan kelelawar. Virus menyebar melalui kontak langsung hewan yang terinfeksi virus ataupun melalui feses, karena virus MERS-CoV dapat bertahan hidup selama 48 jam pada lingkungan bebas. Kedua, penyebaran virus dari hewan ke manusia yaitu terjadi jika manusia mengonsumsi daging, susu, atau urin unta yang telah terinfeksi virus. Virus juga dapat menyebar jika manusia melakukan kontak langsung dengan unta atau kelelawar yang terinfeksi virus MERS-CoV. Ketiga, penyebaran antar manusia terjadi secara langsung dan tidak langsung. Langsung melalui dahak penderita MERS-CoV saat bersin dan tidak langsung melalui bendayang sudah terkontaminasi oleh virus [5].

Model penyebaran penyakit MERS-CoV banyak dibahas sebelumnya, seperti yang dilakukan oleh Dipo Aldila dkk [6] yang mengembangkan model SIR dengan membagi kompartemen *susceptible* kedalam dua subkompartemen yaitu *susceptible without medical mask* dan *susceptible with medical mask*, begitu pula dengan kompartemen *infected* juga dibagi kedalam dua subkompartemen yaitu kompartemen *infected without medical mask* dan *infected with medical mask*, model tersebut dikembangkan untuk mengendalikan penyakit MERS-CoV dengan masker kesehatan, kampanye tentang pentingnya penggunaan masker kesehatan dan intervensi perawatan suportif. Muhammad Syarifudin dkk [7] mengkaji tentang pemberian vaksin Meningitis untuk mencegah penyebaran penyakit MERS-CoV terhadap populasi di dua negara. Selanjutnya Lazarus Kalvein Beay [8] mengkaji pengaruh pengobatan terhadap penyebaran MERS- CoV.

Di pertengahan tahun 2015 wabah MERS-CoV melanda Korea Selatan setelah seorang warga Korea melakukan perjalanan ke Arab Saudi, kemudian ChiMyung Kwon [9] meneliti tentang karakteristik penyebaran MERS-CoV di Korea Selatan dengan membentuk dan menganalisis model matematika penyebaran MERS-CoV dengan membagi kompartemen individu ke dalam empat kategori yaitu *susceptible (S)*, *exposed (E)*, *infected (I)* dan *recovered (R)*. Selanjutnya di tahun 2016 Benny Yong dan Livia Owen [10] membentuk model penyebaran penyakit menular MERS-CoV untuk dua wilayah, dimana model tersebut menjelaskan dinamika populasi penyebaran penyakit menular MERS-CoV akibat perpindahan individu antar wilayah Indonesia dan Arab Saudi. Pada tahun 2019 Jiraporn Lamwong dkk [11] mengembangkan model SEIR penyakit MERS-CoV di Thailand dengan menggunakan Fungsi Lyapunov untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan informasi yang dipublikasikan oleh WHO sejak tahun 2012 hingga 2017 tercatat kasus penyakit MERS ini telah menyebar di 27 Negara seperti Bahrain, Mesir, Iran, Yordania, Kuwait, Libanon, Oman, Qatar, Arab Saudi, Uni Emirat Arab, Yaman, Algeria, Tunisia, Austria, Perancis, Jerman, Yunani, Italia, Belanda, Turki, Inggris, Cina, Korea, Malaysia, Filipina, Thailand, dan Amerika. Diperkirakan sebanyak 80% diantaranya merupakan penduduk Arab Saudi. Penyakit MERS- CoV juga merupakan penyakit mematikan, karena dari kasus di 27 negara tersebut 36% penderitanya meninggal dunia [12].

Melihat penyebaran penyakit MERS-CoV yang semakin mewabah dan fatalnya penyakit, hal ini perlu diwaspadai oleh pemerintah Indonesia karena banyak penduduk Indonesia yang bepergian ke Arab Saudi untuk menjalankan ibadah haji dan umrah. Berdasarkan data Kementerian Agama terdapat sebanyak 205.886 penduduk Indonesia berangkat ke Arab Saudi untuk menunaikan ibadah haji yang tercatat pada tahun 2018 [13]. Jumlah tersebut masih ditambah penduduk Indonesia yang menjalankan ibadah umrah dengan rata-rata 195 orang setiap harinya. Selain itu, MERS-CoV juga menyebabkan penyakit yang lebih parah kepada individu lanjut usia, individu yang mempunyai sistem imun lemah, dan individu dengan penyakit kronis seperti kanker, penyakit paru-paru kronis dan diabetes [7]. Memperhatikan penyebaran virus tersebut, upaya pencegahan yang dapat dilakukan pemerintah Indonesia salah satunya adalah dengan menghimbau masyarakat untuk menggunakan masker kesehatan dan meningkatkan kekebalan tubuh manusia dengan pemberian vaksin [3]. Namun, sampai saat ini masih belum tersedia vaksin dan pengobatan khusus untuk pasien MERS-CoV meskipun upaya untuk menemukan vaksin masih dalam proses [14].

Karena belum ditemukan vaksin untuk penyakit ini, maka vaksin yang diberikan berupa vaksin Meningitis untuk meningkatkan kekebalan tubuh agar tidak mudah terserang penyakit. Vaksinasi yang dilakukan merupakan tindakan preventif, jadi pemberian vaksin dilakukan untuk dapat mengurangi peluang terkena virus MERS-CoV [7]. Penggunaan masker kesehatan bagi penderita MERS-CoV dapat mencegah penularan virus dari percikan dahak saat penderita bersin. Bagi manusia sehat juga sangat penting untuk menghindari terpapar virus dari penderita MERS-CoV.

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata adalah memodelkan atau merumuskan permasalahan nyata dalam bahasa matematika. Setelah model matematika diperoleh maka dapat diselesaikan secara matematis, dan dapat diaplikasikan kembali dalam masalah nyata. Dalam penelitian ini, akan dibentuk model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi. Model ini mengasumsikan individu yang diberi vaksin Meningitis menjadi kebal terhadap penyakit sehingga individu tersebut tidak terkena penyakit MERS-CoV. Dari model tersebut akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik untuk masing-masing kompartemen serta bilangan reproduksi dasar untuk melihat apakah terjadi endemik atau tidak. Selanjutnya akan dilakukan simulasi model, dengan nilai-nilai parameter yang digunakandiambil dari beberapa jurnal tentang penyebaran penyakit MERS-CoV.

1. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, maka permasalahan pada penelitian ini antara lain:

- a. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi?
- b. Bagaimana titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik serta kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakitnya?
- c. Bagaimana bilangan reproduksi dasar pada model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi?
- d. Bagaimana simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi?

2. Tujuan Penelitian

a. Tujuan Penelitian

- 1) Mengetahui model matematika penyebaran penyakit MERSnCoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi.
- 2) Mengetahui titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi.
- 3) Mengetahui bilangan reproduksi awal pada model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi.
- 4) Menganalisa simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi.

b. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan dapat membantu pemerintah maupun pihak-pihak terkait untuk mencegah penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi. Model matematika yang dihasilkan dapat menjadi pilihan yang tepat untuk memahami dinamika penyakit. Dan penulis berharap penelitian ini dapat menambah wawasan dan pengetahuan baru mengenai model matematika penyebaran penyakit, serta dapat membawa masalah-masalah baru dalam bidang pemodelan, sehingga akan muncul penelitian-penelitian yang lain.

B. TINJAUAN PUSTAKA

1. Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus (*MERS-CoV*)

Middle East Respiratory Syndrome dilaporkan pertama kali pada tahun 2012 di Arab Saudi. MERS adalah penyakit yang disebabkan oleh virus korona yang dikenal sebagai *Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus* atau disingkat dengan MERS-CoV. Penamaan virus dan penyakit tersebut disepakati oleh *Coronavirus Study Group (CSG) of the International Committee on Taxonomy of Viruses* sesuai dengan lokasi mewabahnya penyakit ini, yaitu di kawasan Timur Tengah [15]. Penyakit ini umumnya menyerang sistem pernapasan manusia menyebabkan batuk, sesak napas dan demam [16]. Virus tersebut yang menyebabkan SARS (*Severe Acute Respiratory Syndrome*) pada tahun 2003 yang dapat menimbulkan pneumonia berat akan tetapi berbeda dari virus MERS-CoV. Median usia yang terserang penyakit MERS-CoV adalah 49,5 tahun dalam rentang 2-94 tahun, dan 64% pasiennya berjenis kelamin laki-laki [3]. Beberapa penyakit komorbid (penyakit penyerta) pada MERS-CoV diantaranya yaitu diabetes, penyakit ginjal kronik, penyakit jantung kronik, hipertensi, dan penyakit paru kronik. Adapun gejala yang timbul dari penyakit MERS-CoV pada manusia antara lain [17]:

- A. Awal gejalanya mirip seperti flu, nyeri otot, lesu, gangguan pencernaan, radang tenggorokan dan gejala non-spesifik lainnya.
- B. Demam $\geq 38^{\circ}\text{C}$.
- C. Batuk dan napas pendek.
- D. Napas sesak bisa terjadi kemudian. Gejala tersebut biasanya muncul 2-10 hari setelah terekspos, tetapi sampai 13 hari juga pernah dilaporkan terjadi. Pada kebanyakan kasus gejala biasanya muncul 2-3 hari.
- E. Kematian terjadi akibat adanya komplikasi serius yang terjadi seperti *Acute Respiratory Distress Syndrome* (ARDS) dengan kegagalan multiorgan, gagal ginjal serta pneumonia berat.

Namun, tidak semua gejala tersebut akan terjadi pada setiap orang. Seperti gangguan pencernaan dan gagal ginjal, hanya beberapa orang saja yang mengalaminya. Virus ini akan menyerang penderita yang memiliki kekebalan tubuh rendah. Mereka seperti lansia, orang yang mudah lelah, anak kecil, serta mereka yang sedang dalam perjalanan. Masa inkubasi dari virus hingga menyebabkan penyakit adalah 2-14 hari. Sehingga mungkin saja seseorang terinfeksi virus MERS-CoV di Timur Tengah dan kemudian gejala baru timbul begitu sudah kembali ke negara asal [18].

Berdasarkan penelitian, MERS-CoV merupakan *zoonotic virus* yang memasuki populasi manusia di semenanjung Arab melalui kontak langsung ataupun tidak langsung dengan unta ataupun produk-produk dari unta (misalnya susu dan daging unta). Namun demikian, individu manusia yang terinfeksi virus ini dapat menularkan virus ke individu lainnya. Bahkan kasus-kasus baru yang berkaitan dengan MERS-CoV didominasi penularan dari manusia ke manusia. Mekanisme penularan belum diketahui, namun menurut [3] kemungkinan

penularannya dapat melalui: penularan langsung dan tidak langsung. Secara langsung melalui percikan dahak (droplet) pada saat pasien batuk atau bersin, dan secara tidak langsung melalui kontak dengan benda yang sudah terkontaminasi oleh virus.

2. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2.1
Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x ; jelasnya.

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

untuk skalar sebarang λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A , dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ .

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A , kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix \quad (2.2)$$

atau ekuivalen,

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.3)$$

dengan I adalah matriks identitas. Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan ini. Persamaan (2.3) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik matriks A , skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A . Apabila diperluas lagi, $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A [19].

3. Persamaan Differensial

Persamaan differensial merupakan sebuah bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi [20]. Berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, persamaan differensial dibagi menjadi dua, yaitu:

a) Persamaan Differensial Biasa

Persamaan differensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas disebut persamaan differensial biasa.

Contoh 2.1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy \left| \frac{dy}{dx} \right| = 0$$

b) Persamaan Differensial Parsial

Persamaan differensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial.

Contoh 2.2

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

Orde persamaan differensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.

Contoh 2.3

1. $x \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ adalah persamaan differensial orde 1 karena dalam

persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 1.

2. $xy \frac{d^2 y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$ adalah persamaan differensial orde 2 karena dalam persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 2.

3. $\frac{d^3 y}{dx^3} - y \frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$ adalah persamaan differensial orde 3 karena dalam persamaan tersebut, turunan tertingginya adalah 3.

Berdasarkan kelinearannya persamaan differensial dibedakan menjadi dua yaitu persamaan differensial linear dan persamaan differensial nonlinear.

Ciri-ciri dari persamaan differensial linear adalah:

1. Variabel tak bebas y dan *derivative*-nya hanya berderajat satu
2. Tidak ada perkalian antara variabel tak bebas y dan *derivative*-nya
3. Variabel tak bebas y maupun *derivative*-nya bukan termasuk fungsi transenden: logaritma, trigonometri, eksponensial.

Jika suatu persamaan differensial tidak memiliki ciri-ciri seperti diatas maka disebut persamaan differensial nonlinear.

c) Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan differensial adalah kumpulan beberapa persamaan differensial [20]. Secara matematis, sistem persamaan differensial dapat ditulis dalam bentuk:

$$x(t) = f(t, x) \tag{2.5}$$

dengan

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel tak bebas dan t adalah variabel bebas.

Jika pada persamaaan (2.5) variabel t tidak dinyatakan secara eksplisit, maka sistem (2.5) disebut sistem otonomus dan secara matematis dapat ditulis

$$x(t) = f(x) \tag{2.7}$$

dengan

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Penyelesaian sistem persamaan differensial dapat dicari secara analitik maupun secara numerik. Jika penyelesaian sulit atau tidak mungkin secara analitik maupun numerik, maka dapat dilakukan analisis kualitatif dengan cara mengecek kestabilan titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dari sistem tersebut.

Berdasarkan kelinearannya sistem persamaan differensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan differensial linear dan sistem persamaan differensial non linear.

d) Sistem Persamaan Differensial Linear

Secara umum sistem persamaan differensial linear orde satu dengan variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebas t dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + k_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + k_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + k_n(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut sistem persamaan linear homogen jika $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ bernilai nol, sedangkan jika k_i, i bernilai tak nol, sistem disebut dengan sistem persamaan differensial non homogen. Persamaan (2.9) dapat ditulis dalam persamaan berikut

$$\dot{x}(t) = Ax + K(t) \quad (2.10)$$

dengan A adalah matriks $n \times n$ yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ sedangkan $K(t)$ adalah matriks ukuran $n \times 1$ yang merupakan fungsi dari t .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ \vdots \\ k_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Contoh 2.4

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 8y \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

Sistem persamaan differensial (2.12) merupakan sistem persamaan differensial linear homogen.

Contoh 2.5

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = 7x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5t - 6 \\ \frac{dx_2}{dt} = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4t + 2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Sistem (2.13) adalah sistem persamaan persamaan differensial non homogen, karena pada tiap persamaan terdapat $-5t - 6$, $-4t + 2$, dan 2 .

e. Sistem Persamaan Differensial Non Linear Definisi

Persamaan differensial non linear adalah persamaan differensial yang tak linear [20].

Contoh 2.6

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_2 - x_1 - x_2^2 \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) merupakan sistem persamaan differensial non linear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2 . Persamaan (2.14) disebut sistem persamaan differensial non linear karena memuat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 pada persamaan pertama dan terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x_2 pada persamaan kedua.

4. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) merupakan titik yang tidak berubah terhadap waktu. Artinya pada saat $t = 1, 2, \dots, n$ nilai titik tersebut akan tetap dan tidak berubah.

Definisi 2.5.1

Titik $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut sebagai titik ekuilibrium sistem $x = f(x)$ jika memenuhi $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ [21].

Jadi, x^* adalah titik ekuilibrium sistem (2.7) jika dan hanya jika x^* disubstitusikan ke dalam f hasilnya sama dengan nol. Titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan metode substitusi.

Contoh 2.7 Diberikan sistem persamaan differensial nonlinear pada persamaan (2.14) Berdasarkan Definisi 2.5.1 sistem (2.14) dapat ditulis menjadi

$$x_1 - x_1 x_2 = 0 \quad (2.15)$$

$$2x_2 - x_1 - x_2^2 = 0 \quad (2.16)$$

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium sistem (2.14) dengan metode substitusi.

Berdasarkan Persamaan (2.15) diperoleh

$$x_1(1 - x_2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = 1$$

Substitusi $x_1 = 0$ ke persamaan (2.16) diperoleh

$$2x_2 - x_1 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 - 0 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2(2 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ dan } x_2 = 2$$

Selanjutnya substitusi $x_2 = 1$ ke persamaan (2.16)

$$2x_2 - x_1 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1) - x_1 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1$$

Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium sistem (2.14) yaitu $(0,0)$, $(0,2)$ dan $(1,1)$.

Sifat dari perilaku penyelesaian sistem persamaan differensial dapat diketahui dengan cara menganalisis kestabilan titik ekuilibrium. Kestabilan pada suatu sistem berarti perubahan kecil pada sistem hanya sedikit mengubah perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang. Akan tetapi, apabila perubahan kecil pada sistem mengakibatkan perubahan besar pada perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang, maka sistem dikatakan tidak stabil.

Definisi 2.6.1 [22]

Diberikan sistem persamaan differensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{x} = f(x)$ pada saat t dengan nilai awal $x(0) = x_0$

1. *Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.*
2. *Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x^*\| = 0$, asalkan $\|x(t, x_0) - x^*\| < \delta_1$.*
3. *Tidak stabil, jika definisi 1 tidak terpenuhi.*

2.6.1. Kestabilan Sistem Persamaan Differensial Linear

Definisi 2.6.2 [22]

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial $\det(\lambda I - A) = 0$, atau ditulis dalam bentuk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0 \quad (2.17)$$

dengan $a_0 = 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan teorema yang menyatakan hubungan nilai eigen tersebut dengan kestabilan titik ekuilibrium.

Teorema 2.6.3 [22]

Diberikan sistem persamaan differensial $\dot{x} = f(x)$, dengan A suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

1. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$
2. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ dan
3. Titik ekuilibrium x^* dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk suatu $i = 1, 2, \dots, k$

Contoh 2.8 Misalkan diberikan sistem persamaan differensial linear otonomus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= x - y \end{aligned} \tag{2.18}$$

akan dicari kestabilan titik ekuilibrium dari sistem persamaan differensial tersebut. Persamaan differensial linear otonomus (2.18) dapat dibentuk menjadi matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.6.2 maka diperoleh nilai eigen dari Sistem (2.18)

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $\lambda_{1,2} = -1$. Berdasarkan Teorema 2.6.3 maka titik ekuilibrium dari persamaan differensial tersebut stabil asimtotik.

2.6.2. Kestabilan Sistem Persamaan Differensial Nonlinear

Untuk menentukan kestabilan dari suatu solusi setimbang sistem persamaan differensial nonlinear dapat dilakukan dengan cara linearisasi sistem

nonlinear. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Linearisasi pada sistem nonlinear dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik. Proses linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan deret Taylor untuk mencari suatu hampiran solusi di sekitar titik ekuilibrium. Deret Taylor untuk sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ di sekitar titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dengan

$f(x^*) = 0$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \end{aligned}$$

Apabila suku-suku nonlinearnya diabaikan maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Jika persamaan (2.19) dinyatakan dalam bentuk matriks, maka diperoleh

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Misalkan

$$y_1 = x_1 - x_1^*, y_2 = x_2 - x_2^*, \dots, y_n = x_n - x_n^* \quad (2.21)$$

Sehingg diperoleh

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} \quad (2.22)$$

Substitusikan Persamaan (2.21) dan (2.22) ke sistem (2.20), sehingga sistem (2.20) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} y_n \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} y_n \end{aligned} \quad (2.23)$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)} y \quad (2.24)$$

Sistem (2.23) merupakan hasil linearisasi persamaan differensial nonlinear di sekitar titik ekuilibrium, dengan $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ merupakan matriks Jacobian dan

fungsi f di titik ekuilibrium. Kestabilan dari titik ekuilibrium pada sistem kestabilan non linear dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium x^* . Kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada sistem non linear tersebut disajikan pada teroema dibawah ini.

Teorema 2.6.4

Diberikan matriks Jacobian $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ dari sistem (2.23)

1. Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem non linear stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai egen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai positif, maka titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem non linear tidak stabil.

Contoh 2.9 Diberikan sistem (2.14), berdasarkan Contoh 2.7 Diberikan sistem persamaan differensial nonlinear pada persamaan (2.14) Berdasarkan Definisi

2.5.1 sistem (2.14) dapat ditulis menjadidiperoleh titik ekuilibrium sistem (2.14) yaitu $(0, 0)$, $(0, 2)$ dan $(1,1)$. Selanjutnya dilakukan linearisasi di sekitar titik ekuilibrium untuk melihat kelinearannya.

Matriks Jacobi dari sistem (2.14) adalah

$$J_{(x^*)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{dx_1}{dx} \right|_1 & \left. \frac{dx_1}{dx} \right|_2 \\ \left. \frac{dx_2}{dx} \right|_1 & \left. \frac{dx_2}{dx} \right|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & -x \\ -1 & 2-x_2 \end{bmatrix}$$

Untuk $x^* = (0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1-(0) & -(0) \\ -1 & 2-(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk $J_{(0,0)}$ adalah

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J_{(0,0)}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Karena $\lambda_1 = 1 > 0$ dan $\lambda_2 = 2 > 0$ maka berdasarkan Teorema 2.6.4 nilai titik ekuilibrium $(0,0)$ pada sistem persamaan tersebut tidak stabil.

• Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menentukan akar-akar persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A)$. Namun seringkali akar-akar persamaan karakteristik tidak mudah ditemukan. Sehingga diperlukan suatu aturan yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif atau ada persamaan karakteristik yang bernilai positif. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu alternatif untuk menentukan nilai eigen dari suatu polinomial yang tidak mudah dilakukan. Tanda negatif atau positif dapat digunakan untuk menentukan sifat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium.

Definisi 2.7.1 [23]

Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (2.25)$$

Dimana $a_0 = 1$ dan a_k dengan $k = 1, 2, \dots, n$ adalah bilangan real.

Maka didefinisikan k matriks sebagai berikut:

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & a_j \end{bmatrix}, \dots \quad (2.26)$$

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

dimana syarat setiap unsur (l, m) pada matriks H_j adalah

$$H_{lm} = \begin{cases} a_{2l-m} & , \text{ untuk } 0 < 2l - m \leq k \\ 1 & , \text{ untuk } 2l = m \\ 0 & , \text{ untuk } 2l < m \text{ dan } 2l > k + m \end{cases}$$

Dengan demikian, titik ekuilibrium \dot{x} stabil jika dan hanya jika $H_j > 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$.

- **Matriks Generasi Selanjutnya**

Model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan x menyatakan kelas yang terinfeksi penyakit, y menyatakan kelas yang tidak terinfeksi penyakit, \mathcal{F}_i menyatakan matriks dari rata-rata jumlah individu baru yang terinfeksi penyakit dan \mathcal{V}_i menyatakan matriks dari rata-rata

penurunan jumlah individu terinfeksi. Model kompartemen dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathcal{F}_i(x, y) - \mathcal{V}(x, y) & i = 1, 2, \dots, n & \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y}_j &= g_j(x, y) & j = 1, 2, \dots, m & \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.27)$$

Perhitungan bilangan reproduksi dasar berdasarkan sistem (2.27) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Hasil linearisasi dari kelas terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}_i = (\mathcal{F} - \mathcal{V})x \quad (2.28)$$

dengan \mathcal{F} dan \mathcal{V} matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan oleh

$$\mathcal{F} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial x_j} \end{array} (0, y_0) \right] \text{ dan } \mathcal{V} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial x_j} \end{array} (0, y_0) \right] \quad (2.29)$$

dengan $(0, y_0)$ adalah titik ekuilibrium bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} \quad (2.30)$$

yang disebut sebagai *next generation matrix* (matriks generasi selanjutnya). Nilai dari bilangan reproduksi dasar pada populasi rentan adalah radius spektral dari matriks K [24], sehingga

$$R_0 = \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}) \quad (2.31)$$

• Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah ambang batas penularan suatu penyakit yang disebabkan oleh individu terinfeksi dalam suatu populasi yang semuanya rentan untuk terinfeksi, yang biasanya dilambangkan dengan R_0 [25]. Bilangan reproduksi dasar dicari untuk menentukan apakah suatu wilayah terjadi endemik atau tidak. Parameter R_0 mempunyai nilai ambang batas 1. Epidemik akan terjadi pada saat $R_0 > 1$ yang ditandai dengan meningkatnya populasi manusia terinfeksi dan tidak terjadi epidemik pada saat $R_0 < 1$ yang ditandai dengan menurunnya populasi manusia terinfeksi. Penentuan bilangan reproduksi dasar ini akan diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya

[24]. Kondisi yang akan timbul adalah salah satu diantara kemungkinan berikut [26] :

$R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang

$R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat menjadi wabah

- J
- Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menetap (endemik).

Analisis terhadap kondisi ambang batas ini diperlukan untuk mengetahui parameter apa saja yang harus dikontrol agar di dalam populasi tidak terjadi endemik. Langkah-langkah untuk memperoleh nilai R_0 menurut Diekman dkk [27] dengan metode matriks generasi selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan dalam kompartemen infeksi dari sistem. Selanjutnya sistem ini disebut subsistem terinfeksi.
2. Melakukan linearisasi subsistem terinfeksi di sekitar titik keseimbangan bebas penyakit yang dituliskan dalam bentuk matriks dan disebut dengan matriks Jacobian (J).
3. Mendekomposisikan matriks Jacobi dari subsistem terinfeksi menjadi $J = \mathcal{F} - \mathcal{V}$, dengan \mathcal{F} merupakan matriks Transmisi yang elemen-elemennya berhubungan dengan proses penularan infeksi. Sedangkan \mathcal{V} merupakan matriks Transisi yang elemen-elemennya berhubungan dengan perpindahan kompartemen.
4. Menemukan matriks generasi selanjutnya, yaitu $K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$.
5. Menemukan nilai eigen terbesar dari K dan selanjutnya nilai eigen terbesar tersebut dinyatakan sebagai R_0 .

C. Model Matematika Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Penggunaan Masker kesehatan dan Vaksinasi

1. Asumsi Model

Model yang digunakan dalam penyebaran penyakit MERS-CoV adalah model SEIR (*Susceptible Exposed Infected Recovered*) yang dikembangkan dengan membagi populasi individu kedalam enam kompartemen: *Susceptible* (S) yaitu individu yang rentan terkena penyakit, dimana di kompartemen ini terbagi menjadi dua subpopulasi yaitu individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan (S_1) dan individu rentan menggunakan masker kesehatan (S_2), *Exposed* (E) yaitu individu yang tertular penyakit tetapi belum menunjukkan tanda-tanda mengidap penyakit dan belum dapat menularkan penyakit (individu laten) [28], *Infected* (I) yaitu individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit, di kompartemen ini juga terbagi menjadi dua subpopulasi yaitu individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan (I_1) dan individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan (I_2) dan *Recovered* (R) yaitu individu yang

telah sembuh dari penyakit. Asumsi pembentukan model matematika dari penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi dapat disusun sebagai berikut:

1. Virus yang menyebabkan penyakit MERS-CoV adalah virus korona.
2. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada individu masuk kedalam populasi atau keluar dari populasi (tidak ada migrasi). Total populasi diasumsikan konstan.
3. Jumlah kelahiran dan jumlah kematian tiap satuan waktu diasumsikan sama.
4. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain.
5. Individu yang belum terinfeksi virus dan tidak divaksinasi masuk ke dalam kompartemen individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan (S_1).
6. Individu rentan akan diberikan vaksinasi dengan ukuran vaksinasi tertentu sehingga dapat menyebabkan individu yang diberikan vaksin kebal terhadap penyakit.
7. Individu rentan dengan masker kesehatan (S_2) tidak dapat tertular oleh virus.
8. Individu rentan dengan masker kesehatan (S_2) akan kembali ditempatkan

ke (S_1) jika mereka berhenti menggunakan masker kesehatan, proses yang sama juga terjadi pada kompartemen individu terinfeksi.

9. Infeksi virus terjadi ketika terjadi kontak dengan individu yang terinfeksi, baik secara langsung maupun tidak langsung.
10. Individu yang terinfeksi virus dapat sembuh dari penyakit.
11. Individu yang telah sembuh mempunyai kekebalan terhadap penyakit.
12. Kematian akibat penyakit diabaikan, hanya terjadi kematian alami pada setiap subpopulasi.

2. Variabel dan Parameter

Variabel dan parameter yang digunakan dalam model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Daftar variabel model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi

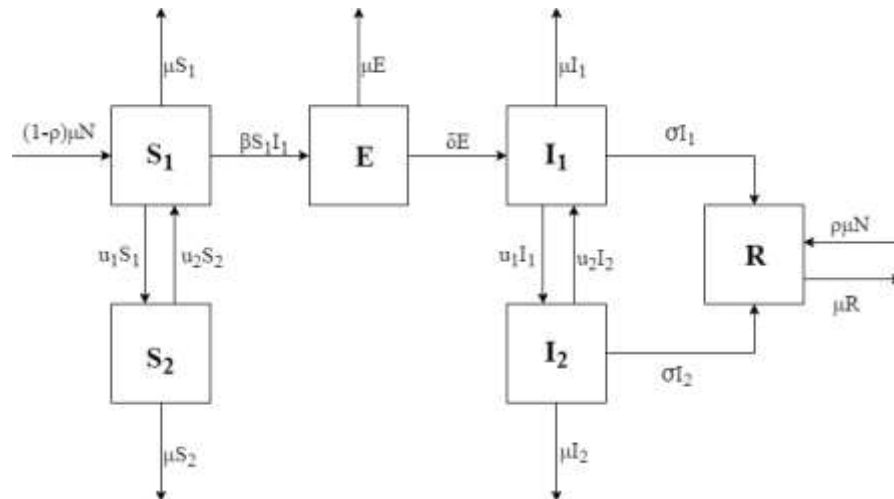
No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1	$N(t)$	Jumlah populasi individu pada waktu ke-t	$N(t) \geq 0$	<i>individu</i>
2	$S_1(t)$	Jumlah individu rentan terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan pada waktu ke-t	$S_1(t) \geq 0$	<i>individu</i>
3	$S_2(t)$	Jumlah individu rentan terinfeksi menggunakan masker kesehatan pada waktu ke-t	$S_2(t) \geq 0$	<i>individu</i>
4	$E(t)$	Jumlah individu laten pada waktu ke-t	$E(t) \geq 0$	<i>individu</i>
5	$I_1(t)$	Jumlah individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan pada waktu ke-t	$I_1(t) \geq 0$	<i>individu</i>
6	$I_2(t)$	Jumlah individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan pada waktu ke-t	$I_2(t) \geq 0$	<i>individu</i>
7	$R(t)$	Jumlah individu sembuh pada waktu ke-t	$R(t) \geq 0$	<i>individu</i>

Tabel 3.2. Daftar parameter model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksin

No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1	μ	Laju kelahiran dan kematian alami populasi individu	$\mu \geq 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
2	ρ	Proporsi banyaknya individu rentan yang divaksinasi	$0 \leq \rho \leq 1$	
3	$(1 - \rho)$	Proporsi banyaknya individu rentan yang tidak divaksinasi	$0 \leq \rho \leq 1$	
4	u_1	Laju penggunaan masker Kesehatan	$u_1 \geq 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
5	u_2	Laju pelepasan masker Kesehatan	$u_2 \geq 0$	$\frac{1}{\text{hari}}$
6	β	Laju individu rentan menjadi individu laten setelah berinteraksi dengan individu Terinfeksi	$\beta \geq 0$	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$
7	δ	Laju transfer dari individu laten menjadi individu Terinfeksi	$\delta \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$
8	σ	Laju kesembuhan tiap individu	$\sigma \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$

3. Penyebaran Penyakit MERS-CoV

Secara skematis proses penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi dalam suatu populasi dapat disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 1.



Gambar 3.1. Diagram Transfer Penyebaran Penyakit MERS-CoV dengan Penggunaan Masker Kesehatan dan Vaksinasi

Berdasarkan diagram transfer Gambar 3.1. populasi individu dibagi menjadi enam kompartemen, yaitu: kompartemen individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan (S_1), kompartemen individu rentan menggunakan masker kesehatan (S_2), kompartemen individu laten (E), kompartemen individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan (I_1), kompartemen individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan (I_2), dan kompartemen individu sembuh (R). Setiap individu yang lahir (μ) akan masuk ke dalam kompartemen (S_1), untuk mencegah individu terinfeksi virus maka individu didalam populasi akan diberikan vaksinasi dengan laju $0 \leq \rho \leq 1$ dan jika $\rho = 0$ maka tidak terjadi vaksinasi di dalam populasi. Individu rentan yang tidak divaksin dan tidak menggunakan masker kesehatan akan dipindahkan kedalam kompartemen individu menggunakan masker kesehatan (S_2) dan akan

ditempatkan kembali ke (S_1) jika mereka berhenti menggunakan masker kesehatan. Proses yang sama terjadi pada individu terinfeksi. Individu yang tidak menggunakan masker kesehatan masih berpeluang terinfeksi oleh virus jika berinteraksi dengan individu terinfeksi dan akan menjadi individu laten (E) dengan laju β . Individu laten akan menjadi individu terinfeksi dengan laju δ . Individu terinfeksi akan sembuh dengan laju σ . Individu rentan yang divaksinasi tidak terkena virus akan langsung masuk ke kompartemen R . Di setiap kompartemen akan ada kematian alami yang lajunya disamakan dengan kelahiran alami dengan laju μ .

Perubahan jumlah individu di dalam populasi di setiap kompartemen dipengaruhi oleh faktor-faktor sebagai berikut:

1. Perubahan jumlah individu di dalam kompartemen individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan (S_1).
 - 1) Penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kelahiran manusia alami yang tidak divaksin sebesar $(1 - \rho)\mu$ dan tingkat individu rentan yang melepas masker kesehatan sebesar u_2 .
 - 2) Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kematian manusia alami sebesar μ , tingkat individu rentan yang menggunakan masker kesehatan sebesar u_1 dan kontak dengan individu terinfeksi yang menjadi individu laten dengan laju β .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dS_1}{dt} = (1 - \rho)\mu N + u_2 S_2 - (\mu + u_1) S_1 - \beta S_1 I_1 \quad (3.1)$$

2. Perubahan jumlah individu di dalam kompartemen individu rentan menggunakan masker kesehatan (S_2).
 - 1) Penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat individu yang menggunakan masker kesehatan sebesar u_1 .

- 2) Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kematian manusia alami sebesar μ dan tingkat individu yang melepas masker kesehatan sebesar u_2 .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu rentan yang menggunakan masker kesehatan terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dS_2}{dt} = u_1 S_1 - (\mu + u_2) S_2 \quad (3.2)$$

3. Perubahan jumlah individu laten

- 1) Penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh kontak individu rentan dengan individu terinfeksi yang menjadi individu laten dengan laju perpindahan sebesar β .
- 2) Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kematian manusia alami sebesar μ dan individu laten yang menjadi individu terinfeksi dengan laju perpindahan sebesar δ .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu laten terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dE}{dt} = \beta S_1 I_1 - (\mu + \delta) E \quad (3.3)$$

4. Perubahan jumlah individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan

- 1) Penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh kontak individu laten dengan individu terinfeksi dengan laju sebesar δ dan tingkat individu terinfeksi yang melepas masker kesehatan sebesar u_2 .
- 2) Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kematian manusia alami sebesar μ , tingkat individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan dengan laju sebesar u_1 dan tingkat kesembuhan individu terinfeksi sebesar σ .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dI_1}{dt} = \delta E + u_2 I_2 - (\mu + u_1 + \sigma) I_1 \quad (3.4)$$

5. Perubahan jumlah individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan
- 1) Penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat individu terinfeksi yang menggunakan masker kesehatan sebesar u_1 .
 - 2) Pengurangan jumlah individu dipengaruhi oleh tingkat kematian manusia alami sebesar μ , tingkat individu melepas masker kesehatan sebesar u_2 dan tingkat kesembuhan individu terinfeksi sebesar σ .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dI_2}{dt} = u_1 I_1 - (\mu + u_2 + \sigma) I_2 \quad (3.5)$$

6. Perubahan jumlah individu sembuh
- 1) Penambahan jumlah individu sembuh dipengaruhi oleh perpindahan individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan dan menggunakan masker kesehatan yang sembuh dengan laju sebesar σ dan individu rentan divaksinasi yang tidak terkena penyakit dengan laju sebesar ρ .
 - 2) Pengurangan jumlah individu sembuh dipengaruhi oleh kematian manusia alami sebesar μ .

Dengan demikian diperoleh tingkat individu sembuh terhadap waktu yaitu:

$$\frac{dR}{dt} = \sigma I_1 + \sigma I_2 + \rho \mu N - \mu R \quad (3.6)$$

Berdasarkan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) dan (3.6) diperoleh model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksin adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= (1 - \rho)\mu N + u_2 S_2 - (\mu + u_1) S_1 - \beta S_1 I_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= u_1 S_1 - (\mu + u_2) S_2 \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S_1 I_1 - (\mu + \delta) E \\ \frac{dI_1}{dt} &= \delta E + u_2 I_2 - (\mu + u_1 + \sigma) I_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= u_1 I_1 - (\mu + u_2 + \sigma) I_2 \\ \frac{dR}{dt} &= \sigma I_1 + \sigma I_2 + \rho \mu N - \mu R\end{aligned}$$

Dengan nilai $N = S_1 + S_2 + E + I_1 + I_2 + R$ maka $\frac{dN}{dt} = 0$, sehingga $N(t) = k$

untuk k bilangan bulat positif, karena $N(t)$ konstan. Sistem (3.7) dapat dibentuk dalam model *non-dimensional*, untuk menyederhanakan sistem (3.7) proporsi banyaknya individu masing-masing kompartemen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s_1 = \frac{S_1}{N}, s_2 = \frac{S_2}{N}, e = \frac{E}{N}, i_1 = \frac{I_1}{N}, i_2 = \frac{I_2}{N}, r = \frac{R}{N} \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh:

$$s_1 + s_2 + e + i_1 + i_2 + r = \frac{S_1}{N} + \frac{S_2}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I_1}{N} + \frac{I_2}{N} + \frac{R}{N} = 1$$

Dari persamaan (3.8) maka sistem persamaan (3.7) dapat dibentuk dalam model *non-dimensional* menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{dt} &= (1 - \rho)\mu + u_2 s_2 - (\mu + u_1) s_1 - \beta s_1 i_1 \\ \frac{ds_2}{dt} &= u_1 s_1 - (\mu + u_2) s_2 \\ \frac{de}{dt} &= \beta s_1 i_1 - (\mu + \delta) e \\ \frac{di_1}{dt} &= \delta e + u_2 i_2 - (\mu + u_1 + \sigma) i_1 \\ \frac{di_2}{dt} &= u_1 i_1 - (\mu + u_2 + \sigma) i_2 \\ \frac{dr}{dt} &= \sigma i_1 + \sigma i_2 + \rho \mu - \mu r\end{aligned} \quad (3.9)$$

Selanjutnya, pada sistem (3.9) variable r tidak muncul pada persamaan lain. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kompartemen r tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kompartemen yang lain, maka persamaan r untuk sementara dapat diabaikan dari sistem. Sehingga sistem (3.9) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= (1 - \rho)\mu + u_2s_2 - (\mu + u_1)s_1 - \beta s_1 i_1 \\
\frac{ds_2}{dt} &= u_1s_1 - (\mu + u_2)s_2 \\
\frac{de}{dt} &= \beta s_1 i_1 - (\mu + \delta)e \\
\frac{di_1}{dt} &= \delta e + u_2i_2 - (\mu + u_1 + \sigma)i_1 \\
\frac{di_2}{dt} &= u_1i_1 - (\mu + u_2 + \sigma)i_2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Sistem (3.10) merupakan sistem persamaan differensial nonlinear yang lebih sederhana dari sistem (3.7) yang mempresentasikan model penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi.

4. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Sistem (3.10) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu, titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan Definisi 2.5.1. sistem (3.10) dapat ditulis menjadi:

$$(1 - \rho)\mu + u_2s_2 - (\mu + u_1)s_1 - \beta s_1 i_1 = 0 \quad = \quad 0 \tag{3.11}$$

$$u_1s_1 - (\mu + u_2)s_2 = 0 \tag{3.12}$$

$$\beta s_1 i_1 - (\mu + \delta)e = 0 \tag{3.13}$$

$$\delta e + u_2i_2 - (\mu + u_1 + \sigma)i_1 = 0 \tag{3.14}$$

$$u_1i_1 - (\mu + u_2 + \sigma)i_2 = 0 \tag{3.15}$$

5. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi, sehingga $i_1 = i_2 = 0$. Selanjutnya substitusi $i_1 = 0$ ke persamaan (3.11), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1 - \rho)\mu + u_2s_2 - (\mu + u_1)s_1 - \beta s_1 i_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \rho)\mu + u_2s_2 - (\mu + u_1)s_1 - \beta s_1 (0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \rho)\mu + u_2s_2 - (\mu + u_1)s_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Selanjutnya substitusi $i_1 = 0$ ke persamaan (3.13), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta s_1 i_1 - (\mu + \delta)e = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta s_1(0) - (\mu + \delta)e = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\mu + \delta)e = 0 \\
&\Leftrightarrow e = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dari persamaan (3.12), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow u_1 s_1 - (\mu + u_2)s_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mu + u_2)s_2 = u_1 s_1 \\
&\Leftrightarrow s_2 = \frac{u_1 s_1}{(\mu + u_2)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Substitusi (3.18) ke persamaan (3.16)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1 - \rho)\mu + u_2 s_2 - (\mu + u_1)s_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \rho)\mu + u_2 \left(\frac{u_1 s_1}{(\mu + u_2)} \right) - (\mu + u_1)s_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow -s_1 \left((\mu + u_1) - \frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2)} \right) = -(1 - \rho)\mu \\
&\Leftrightarrow s_1 = \frac{(1 - \rho)\mu}{\left((\mu + u_1) - \frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2)} \right)} \\
&\Leftrightarrow s_1 = \frac{(1 - \rho)(\mu + u_2)}{(\mu + u_1 + u_2)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Sehingga persamaan (3.18) menjadi $s_2 = \frac{u_1(1 - \rho)}{\mu + u_1 + u_2}$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sistem (3.10) yaitu

$$E_1(s_1, s_2, e, i_1, i_2) = \left(\frac{(1 - \rho)(\mu + u_2)}{\mu + u_1 + u_2}, \frac{u_1(1 - \rho)}{\mu + u_1 + u_2}, 0, 0, 0 \right) \tag{3.20}$$

6. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Endemik penyakit artinya

di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu $I_1^* > 0$ dan $I_2^* > 0$.

Dari persamaan (3.15) diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow u_1 i_1 - (\mu + u_2 + \sigma) i_2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\mu + u_2 + \sigma) i_2 = u_1 i_1 \\
 &\Leftrightarrow i_2 = \frac{u_1 i_1}{(\mu + u_2 + \sigma)} \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow u_1 s_1 - (\mu + u_2) s_2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\mu + u_2) s_2 = u_1 s_1 \\
 &\Leftrightarrow s_2 = \frac{u_1 s_1}{(\mu + u_2)} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \beta s_1 i_1 - (\mu + \delta) e = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\mu + \delta) e = \beta s_1 i_1 \\
 &\Leftrightarrow e = \frac{\beta s_1 i_1}{(\mu + \delta)} \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.21) dan (3.23) ke persamaan (3.14), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \delta e + u_2 i_2 - (\mu + u_1 + \sigma) i_1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\beta \delta s_1 i_1}{(\mu + \delta)} + \frac{u_1 u_2 i_1}{(\mu + u_2 + \sigma)} - (\mu + u_1 + \sigma) i_1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\beta \delta s_1 i_1}{(\mu + \delta)} + i_1 \left(\frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2 + \sigma)} - (\mu + u_1 + \sigma) \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\beta \delta s_1 i_1}{(\mu + \delta)} = -i_1 \left(\frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2 + \sigma)} - (\mu + u_1 + \sigma) \right) \\
 &\Leftrightarrow s_1 = \frac{\left(-\frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2 + \sigma)} + (\mu + u_1 + \sigma) \right)}{\frac{\beta \delta}{(\mu + \delta)}}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow s_1 = \frac{(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)(\mu + \delta)}{\beta\delta(\mu + u_2 + \sigma)} \quad (3.24)$$

Sehingga persamaan (3.22) menjadi

$$s_2 = \frac{u_1(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)(\mu + \delta)}{\beta\delta(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)} \quad (3.25)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.24) dan (3.25) ke persamaan (3.11), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - \rho)\mu + u_2 s_2 - (\mu + u_1) s_1 - \beta s_1 i_1 &= 0 \\ - (1 - \rho)\mu + \frac{u_1 u_2 (\mu + \sigma)(d + \sigma)c}{\beta\delta(\mu + u_2)n} - (\mu + u_1) \frac{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c}{\beta\delta n} - \beta \frac{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c}{\beta\delta n} i_1 &= 0 \\ - \frac{\beta\delta\mu n(1 - \rho)}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c} + \frac{u_1 u_2}{(\mu + u_2)} - (\mu + u_1) - \beta i_1 &= 0 \\ - \frac{\beta\delta\mu n(1 - \rho)}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c} + \left(\frac{u_1 u_2 - (\mu + u_1)(\mu + u_2)}{(\mu + u_2)} \right) &= \beta i_1 \\ - \frac{\beta\delta\mu n(1 - \rho)}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c} - \left(\frac{\mu^2 + \mu u_1 + \mu u_2}{(\mu + u_2)} \right) &= \beta i_1 \\ - \mu \left(\frac{\beta\delta n(1 - \rho)}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c} - \left(\frac{\mu + u_1 + u_2}{(\mu + u_2)} \right) \right) &= \beta i_1 \\ - \mu \left(\frac{\beta\delta n(1 - \rho)}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c} - \frac{d}{(\mu + u_2)} \right) &= \beta i_1 \\ - \mu \left(\frac{\beta\delta n(1 - \rho)(\mu + u_2) - d(\mu + \sigma)(d + \sigma)c}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c(\mu + u_2)} \right) &= \beta i_1 \\ - \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta\delta n(1 - \rho)(\mu + u_2) - d(\mu + \sigma)(d + \sigma)c}{(\mu + \sigma)(d + \sigma)c(\mu + u_2)} \right) &= i_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik sistem (3.10) adalah

$E_2 = (s_1^*, s_2^*, e^*, i_1^*, i_2^*)$ dengan

$$\begin{aligned} s_1^* &= \frac{(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)(\mu + \delta)}{\beta\delta(\mu + u_2 + \sigma)} \\ s_2^* &= \frac{u_1 s_1^*}{(\mu + u_2)} \end{aligned}$$

$$e^* = \frac{\beta s_1 i_1^*}{(\mu + \delta)}$$

$$i_1^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta \delta n (1 - \rho) (\mu + u_2) - d (\mu + \sigma) (d + \sigma) c}{(\mu + \sigma) (d + \sigma) c (\mu + u_2)} \right)$$

$$i_2^* = \frac{u_1 i_1^*}{(\mu + u_2 + \sigma)}$$

dimana $c = (\mu + \delta)$, $d = (\mu + u_1 + u_2)$, $n = (\mu + u_2 + \sigma)$.

7. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Selanjutnya, menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem

(3.10) dengan mencari nilai eigen maksimum yang diperoleh dari Matriks Generasi Selanjutnya. Matriks Generasi Selanjutnya dapat diperoleh dari model persamaan subsistem terinfeksi. Langkah-langkah penentuan bilangan reproduksi dasar sistem (3.10), yaitu:

1. Mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan dalam kompartemen infeksi dari sistem. Selanjutnya sistem ini disebut subsistem terinfeksi. Pada sistem (3.10), subsistem yang terinfeksi adalah e, i_1 dan i_2 .
2. Melakukan pelinearan terhadap subsistem terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Sistem linear ini direpresentasikan dengan Matriks Jacobi (\mathbf{J}) sebagai berikut:

$$J_{(E)} = \begin{bmatrix} \frac{de}{de} & \frac{de}{di_1} & \frac{de}{di_2} \\ \frac{di_1}{de} & \frac{di_1}{di_1} & \frac{di_1}{di_2} \\ \frac{di_2}{de} & \frac{di_2}{di_1} & \frac{di_2}{di_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu + \delta) & \beta s_1 & 0 \\ \delta & -(\mu + u_1 + \sigma) & u_2 \\ 0 & u_1 & -(\mu + u_2 + \sigma) \end{bmatrix}$$

$$J_{(s_1, s_2, e, i_1, i_2)} = \begin{bmatrix} -(\mu + \delta) & \frac{\beta (1 - \rho) (\mu + u_2)}{(\mu + u_1 + u_2)} & 0 \\ \delta & -(\mu + u_1 + \sigma) & u_2 \\ 0 & u_1 & -(\mu + u_2 + \sigma) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3. Dekomposisi matriks Jacobi (J) menjadi $J = \mathcal{F} - \mathcal{V}$, dengan \mathcal{F} adalah matriks Transmisi dan \mathcal{V} adalah matriks Transmisi

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu+\delta) & 0 & 0 \\ -\delta & (\mu+u_1+\sigma) & -u_2 \\ 0 & -u_1 & (\mu+u_2+\sigma) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Hitung \mathcal{V}^{-1} ,

$$\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+\delta} & 0 & 0 \\ \frac{\delta(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+\delta)A} & \frac{(\mu+u_2+\sigma)}{A} & \frac{u_2}{A} \\ \frac{\delta u_1}{(\mu+\delta)A} & \frac{u_1}{A} & \frac{(\mu+u_1+\sigma)}{A} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

dengan $A = (\mu+\sigma)(\mu+u_1+u_2+\sigma)$

4. Hitung R_0 dengan $R_0 = \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1})$

$$\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+\delta} & 0 & 0 \\ \frac{\delta(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+\delta)A} & \frac{(\mu+u_2+\sigma)}{A} & \frac{u_2}{A} \\ \frac{\delta u_1}{(\mu+\delta)A} & \frac{u_1}{A} & \frac{(\mu+u_1+\sigma)}{A} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{B\delta(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)(\mu + \delta)A} & \frac{B(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)A} & \frac{Bu_2}{(u_1 + u_2 + \mu)A} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dengan $A = (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)$ dan $B = \beta(1 - \rho)(\mu + u_2)$.

Nilai eigen matriks (\mathcal{FV}^{-1}) diperoleh dari persamaan berikut

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \mathcal{FV}^{-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)(\mu + \delta)A} & \frac{\beta(1-\rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)A} & \frac{\beta u_2(1-\rho)(\mu + u_2)}{(u_1 + u_2 + \mu)A} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)(\mu + \delta)A} \right) \lambda^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

sehingga diperoleh $\lambda_{1,2} = 0$ dan $\lambda_3 = \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)(\mu + \delta)A}$

Karena bilangan reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral atau nilai terbesar dari nilai eigen, maka didapat

$$R_0 = \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(u_1 + u_2 + \mu)(\mu + \delta)A} \quad (3.33)$$

dengan $A = (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)$

F. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Sistem (3.10) merupakan sistem nonlinear. Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem di sekitar titik ekuilibrium. Misal $E = (s_1, s_2, e, i_1, i_2)$ adalah titik-titik ekuilibrium dari sistem (3.10). Matriks Jacobian sistem (3.10) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
J_{(E)} = & \begin{bmatrix} \frac{ds_1}{di} & \frac{ds_1}{di} & \frac{ds_1}{di} & \frac{ds_1}{di} & \frac{ds_1}{di} \\ \frac{ds_2}{di} & \frac{ds_2}{di} & \frac{ds_2}{di} & \frac{ds_2}{di} & \frac{ds_2}{di} \\ \frac{de}{di} & \frac{de}{di} & \frac{de}{di} & \frac{de}{di} & \frac{de}{di} \\ \frac{di_1}{di} & \frac{di_1}{di} & \frac{di}{di} & \frac{di_1}{di} & \frac{di}{di} \\ \frac{di}{di} & \frac{di}{di} & \frac{di}{di} & \frac{di}{di} & \frac{di}{di} \end{bmatrix} \\
J_{(E)} = & \begin{bmatrix} -\beta i_1 - \mu - u_1 & u_2 & 0 & -\beta s_1 & 0 \\ & -\mu - u_2 & 0 & 0 & \\ & \beta i_1 & 0 & -\mu - \delta & \beta s_1 \\ & & 0 & \delta & -\mu - u - \sigma & u \\ & 0 & 0 & 0 & u_1 & -\mu - u_2 - \sigma \end{bmatrix} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit sistem (3.10). Substitusi titik ekuilibrium bebas penyakit

$E_1(s_1, s_2, e, i_1, i_2) = \left(\frac{(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)}, \frac{u_1 s_1}{(\mu+u_1)}, 0, 0, 0 \right)$ ke persamaan (3.34) sehingga

diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} -\mu - u_1 & u_2 & 0 & -\beta \frac{(1-\rho)(\mu+u_2)}{\mu+u_1+u_2} & 0 \\ u_1 & -\mu - u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \delta & \beta \frac{(1-\rho)(\mu+u_2)}{\mu+u_1+u_2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - u_1 - \sigma & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & -\mu - u_2 - \sigma \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Teorema 3.5.1 Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit

$E_1(s_1, s_2, e, i_1, i_2) = \left(\frac{(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)}, \frac{u_1 s_1}{(\mu+u_1)}, 0, 0, 0 \right)$ sistem (3.10) stabil asimtotik lokal.

Bukti.

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_2 = -\mu - u_1 - u_2$, karena μ , u_1 , dan u_2 bernilai positif maka bagian real dari kedua nilai eigen tersebut adalah negatif. Dari persamaan (3.36) dapat dilihat bahwa persamaan karakteristik untuk ketiga nilai eigen lainnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
P &= (\lambda + c)(\lambda + m)(\lambda + n) - (\lambda + c)(u_1 u_2) - Q(\lambda + n) \\
&= (\lambda + c)[(\lambda + m)(\lambda + n) - u_1 u_2] - Q(\lambda + n) \\
&= (\lambda + c)[\lambda^2 + \lambda(m + n) + mn - u_1 u_2] - \lambda Q - Qn \\
&= (\lambda + c)[\lambda^2 + \lambda(m + n) + (\mu + u_1 + \sigma)(\mu + u_2 + \sigma) - u_1 u_2] - \lambda Q - Qn \\
&= (\lambda + c)[\lambda^2 + \lambda(m + n) + (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)] - \lambda Q - Qn \\
&= \lambda^3 + \lambda^2(m + n + c) + \lambda((\mu + \sigma)(d + \sigma) + c(m + n) - Q) + c(\mu + \sigma)(d + \sigma) - Qn \quad (3.37)
\end{aligned}$$

diperoleh $a_0 = 1$, $a_1 = m + n + c$, $a_2 = ((\mu + \sigma)(d + \sigma) + c(m + n) - Q)$ dan $a_3 = c(\mu + \sigma)(d + \sigma) - Qn$, dengan $Q = \frac{\delta\beta b(1-\rho)}{d}$. Untuk mengetahui tanda

bagian real nilai eigen yang lainnya akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz, sehingga diperoleh:

$$\frac{a_1}{a_0} = m + n + c \quad (3.38)$$

$$\frac{a_2}{a_0} = (\mu + \sigma)(d + \sigma) + c(m + n) - Q \quad (3.39)$$

$$\frac{a_3}{a_0} = c(\mu + \sigma)(d + \sigma) - Qn \quad (3.40)$$

Syarat pertama kriteria Routh-Hurwitz adalah $\frac{a_1}{a_0} > 0$, $\frac{a_2}{a_0} > 0$ dan $\frac{a_3}{a_0} > 0$. Akan

ditunjukkan $\frac{a_1}{a_0} > 0$. Perhatikan:

$$\frac{a_1}{a_0} = (m + c + n) = \mu + u_1 + \sigma + \mu + \delta + \mu + u_2 + \sigma = 3\mu + 2\sigma + u_1 + u_2 + \delta \quad (3.41)$$

diketahui $\mu \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $u_1 \geq 0$ dan $u_2 \geq 0$ maka jelas $\frac{a_1}{a_0} > 0$. Selanjutnya akan

ditunjukkan $\frac{a_2}{a_0} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_0} &= (\mu + \sigma)(d + \sigma) + c(m + n) - Q \\ \frac{a_2}{a_0} &= (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) + (\mu + \delta)(m + n) - \frac{\beta\delta(\mu + u_2)(1 - \rho)}{(\mu + u_1 + u_2)} \\ \frac{a_2}{a_0} &= (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) - \frac{\beta\delta(\mu + u_2)(1 - \rho)}{(\mu + u_1 + u_2)} + c(m + n) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Diperhatikan bahwa jika $R_0 < 1$, maka

$$\begin{aligned} R_0 &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\beta\delta(1 - \rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(\mu + \sigma)(\mu + \delta)(\mu + u_1 + u_2)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\beta\delta(1 - \rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(\mu + \delta)(\mu + u_1 + u_2)} &< (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) \\ \Leftrightarrow \frac{\beta\delta(1 - \rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(\mu + \delta)(\mu + u_1 + u_2)} - (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) &< 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) - \frac{\beta\delta(1 - \rho)(\mu + u_2)(\mu + u_2 + \sigma)}{(\mu + u_1 + u_2)(\mu + \delta)} &> 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Berdasarkan persamaan (3.43) maka haruslah,

$$\frac{a_2}{a_0} = (\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) - \frac{\beta\delta(\mu + u_2)(1 - \rho)}{(\mu + u_1 + u_2)} + c(m + n) > 0 \quad (3.44)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $\frac{a_3}{a_0} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{a_3}{a_0} &= c(\mu + \sigma)(d + \sigma) - Qn \\ \frac{a_3}{a_0} &= (\mu + \delta)(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma) - \frac{\beta\delta(1 - \rho)(\mu + u_2)}{(\mu + u_1 + u_2)}(\mu + u_2 + \sigma) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Diperhatikan bahwa jika $R_0 < 1$, maka

$$\begin{aligned}
& R_0 < 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+u_1+u_2)(\mu+u_1+u_2+\sigma)} < 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+u_1+u_2)} < (\mu+\delta)(\mu+\sigma)(\mu+u_1+u_2+\sigma) \\
\Leftrightarrow & \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+u_1+u_2)} - (\mu+\delta)(\mu+\sigma)(\mu+u_1+u_2+\sigma) < 0 \\
\Leftrightarrow & (\mu+\delta)(\mu+\sigma)(\mu+u_1+u_2+\sigma) - \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)}(\mu+u_2+\sigma) > 0 \\
\Leftrightarrow & a_3 > 0 \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz semua nilai eigen (3.37) akan bernilai negatif jika $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ dan $\Delta_3 > 0$. Didefinisikan matriks Routh Hurwitz sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+c+n & 1 & 0 \\ c(\mu+\sigma)(d+\sigma)-Qn & (\mu+\sigma)(d+\sigma)+c(m+n)-Q & m+c+n \\ 0 & 0 & c(\mu+\sigma)(d+\sigma)-Qn \end{bmatrix} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Berdasarkan matriks H , diperoleh determinan matriks Routh Hurwitz sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |a_1| \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 (1) \\
&= (m+n+c)[(\mu+\sigma)(d+\sigma)+c(m+n)-Q] - [c(\mu+\sigma)(d+\sigma)-Qn] \\
&= (m+n+c)(\mu+\sigma)(d+\sigma) + (m+n+c)c(m+n) - (m+n+c)Q - c(\mu+\sigma)(d+\sigma) + Qn \\
&= (m+n)(\mu+\sigma)(d+\sigma) + c(\mu+\sigma)(d+\sigma) + (m+n+c)c(m+n) - (m+c)Q - Qn \\
&\quad - c(\mu+\sigma)(d+\sigma) + Qn \\
&= (m+n)(\mu+\sigma)(d+\sigma) + (m+n+c)c(m+n) - (m+c)Q
\end{aligned}$$

$$= (m+n)[(\mu+\sigma)(d+\sigma) + (m+n+c)c] - (m+c)Q$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3) = a_3(\Delta_2)0$$

Berdasarkan persamaan (3.41) jelas diperoleh bahwa $a_1 > 0$ sehingga $\Delta_1 > 0$. Selanjutnya $\Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0$ maka haruslah

$$(m+n)[(\mu+\sigma)(d+\sigma) + (m+n+c)c] > (m+c)Q \quad (3.48)$$

Perhatikan jika $R_0 < 1$

$$R_0 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+u_1+u_2)(\mu+u_1+u_2+\sigma)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)}{(\mu+u_1+u_2)} \frac{(\mu+u_2+\sigma)}{(\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+u_1+u_2+\sigma)} < 1$$

$$\Leftrightarrow Q \frac{n}{c(\mu+\sigma)(d+\sigma)} < 1$$

$$\Leftrightarrow Qn < c(\mu+\sigma)(d+\sigma)$$

$$\Leftrightarrow Qn - c(\mu+\sigma)(d+\sigma) < 0$$

$$\Leftrightarrow c(\mu+\sigma)(d+\sigma) - Qn > 0$$

$$\Leftrightarrow c(\mu+\sigma)(d+\sigma) > Qn$$

$$\Leftrightarrow (m+c)c(\mu+\sigma)(d+\sigma) > Qn(m+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+c)c(\mu+\sigma)(d+\sigma)}{n} > Q(m+c) \quad (3.49)$$

Berdasarkan persamaan (3.49), maka persamaan (3.48) haruslah terpenuhi, sehingga $\Delta_2 > 0$. Selanjutnya untuk menunjukkan $\Delta_3 > 0$, diketahui bahwa $a_3 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$, maka haruslah $\Delta_3 = a_3(\Delta_2) > 0$. Determinan matriks Routh Hurwitz Δ_1 , Δ_2 dan Δ_3 bernilai positif jika $R_0 < 1$. Dengan demikian persamaan (3.37) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga berdasarkan Teorema (2.6.4) dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 merupakan stabil asimtotik lokal.

D. HASIL SIMULASI MODEL

1. Nilai-nilai Parameter

Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 18 dan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil yang telah dianalisis. Beberapa nilai parameter yang digunakan diambil dari beberapa penelitian sebelumnya mengenai penyakit MERS-CoV. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Diasumsikan total populasi adalah 2000 individu dan rata-rata hidup

$$\text{manusia adalah } 75 \text{ tahun. Sehingga } \mu = \frac{2000}{75 \cdot 365} \frac{1}{\text{hari}}$$

2. Laju penularan penyakit MERS-CoV adalah 0.1 artinya diperlukan 10 kali kontak sukses untuk menghasilkan 1 individu terinfeksi, sehingga

$$\beta = \frac{1}{10} \frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$$

3. Masa inkubasi penyakit MERS-CoV adalah 2-14 hari. Misalkan masa inkubasi penyakit MERS-CoV diasumsikan 14 hari, maka laju rata-rata

$$\text{individu laten menjadi individu terinfeksi adalah } \delta = \frac{1}{14} \frac{\text{individu}}{\text{hari}}$$

4. Individu yang terinfeksi MERS-CoV dapat sembuh dalam waktu 30 hari. Maka tingkat kesembuhan individu dari penyakit MERS-CoV adalah

$$\sigma = \frac{1}{30} \frac{\text{individu}}{\text{hari}}$$

5. Nilai-nilai parameter lainnya berdasarkan [6], $u_1 = 0.7$ artinya terdapat 70% individu yang menggunakan masker kesehatan dari total populasi individu, $u_2 = 0.3$, artinya terdapat 30% individu yang melepas masker kesehatan dari total populasi individu, $\rho = 0.8$ artinya terdapat 80% individu yang divaksin dari total individu dan $1 - \rho = 0.2$ artinya terdapat 20% individu yang tidak divaksin dari total individu.

Dengan demikian diperoleh tabel nilai-nilai parameter sebagai berikut:

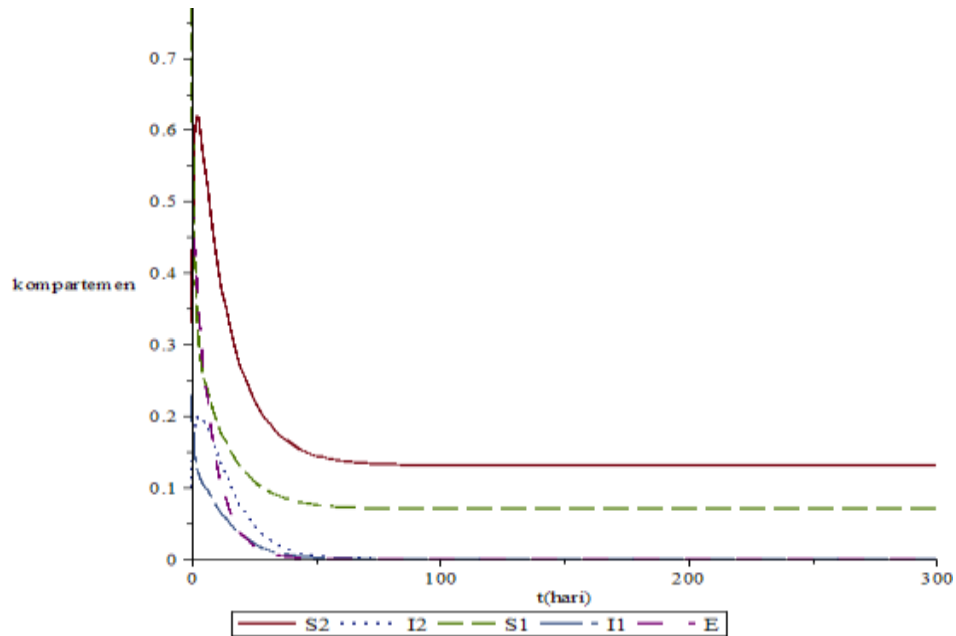
Tabel 4.1. Nilai-nilai Parameter Sistem (3.10)

Parameter	Nilai	Satuan
μ	0.07305936073	$\frac{1}{\text{hari}}$
ρ	0.8	
u_1	0.7	$\frac{1}{\text{hari}}$
u_2	0.3	$\frac{1}{\text{hari}}$
β	0.1	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$
δ	0.07142857143	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$
σ	0.03333333333	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$
N	2000	<i>individu</i>

2. Perhitungan Numerik dan Simulasi Model

Berdasarkan nilai-nilai parameter diatas diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (3.10) adalah $R_0 = 0.011867 < 1$. Karena $R_0 < 1$ maka penyakit tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakitnya adalah $E_1(s_1, s_2, e, i_1, i_2) = (0.069532, 0.130468, 0, 0, 0)$.

Hasil simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 menggunakan program Maple 18 berdasarkan parameter pada Tabel 4.1 dan dengan sebarang nilai awal $s_1(0) = 0.77, s_2(0) = 0.7, e(0) = 0.5, i_1(0) = 0.23, i_2(0) = 0.1$ disajikan dalam gambar berikut.



Gambar 4.1. Simulasi sistem (3.10) menuju titik ekuilibrium bebas penyakit

Berdasarkan Gambar 4.1 populasi individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan awalnya menurun, hingga pada hari ke-50 populasi individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan mencapai titik 0.069532 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu rentan menggunakan masker kesehatan menurun, hingga hari ke-50 mencapai titik 0.130468 dan stabil pada titik tersebut.

Populasi individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan menurun, hingga pada hari ke-40 mencapai titik 0 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan dan individu laten menurun, hingga hari ke-30 mencapai titik 0 dan stabil di titik tersebut.

Jumlah populasi untuk penyebaran penyakit MERS-CoV dari masing-masing kompartemen akan stabil pada saat yang bersamaan di titik ekuilibrium bebas penyakitnya setelah hari ke-50 dengan

6. Jumlah populasi rentan tidak menggunakan masker medis

$$\begin{aligned}
 S_1 &= s_1 \cdot N \\
 &= (0.069532)(2000) \\
 &= 139.0638297 \\
 &\approx 139 \text{ individu}
 \end{aligned}$$

7. Jumlah populasi rentan menggunakan masker medis

$$\begin{aligned}
S_2 &= s_2 \cdot N \\
&= (0.130468)(2000) \\
&= 260.9361702 \\
&\approx 261 \text{ individu}
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk proporsi populasi individu sembuh dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned}
1 &= s_1 + s_2 + e + i_1 + i_2 + r \\
r &= 1 - (s_1 + s_2 + e + i_1 + i_2) \\
r &= 1 - (0.069532 + 0.130468 + 0 + 0 + 0) \\
r &= 1 - (0.200000) \\
r &= 0.800000
\end{aligned}$$

Sehingga jumlah populasi yang sembuh

$$\begin{aligned}
R &= r \cdot N \\
&= (0.800000)(2000) \\
&= 1600 \text{ individu}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk $R_0 > 1$. Jika nilai parameter β diperbesar 45×10^{-1} dari nilai sebelumnya menjadi $\beta = 0.9$, nilai parameter δ diperbesar 28×10^{-1} menjadi $\delta = 0.2$, dan nilai parameter u_1, u_2 dan ρ menjadi $u_1 = 0.1, u_2 = 0.9$ dan $\rho = 0.1$, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (3.10) adalah $R_0 = 4.599598$. Karena $R_0 > 1$, maka penyakit akan menyebar dengan kata lain akan terjadi epidemi. Perhitungan titik ekuilibriumnya diperoleh sebagai berikut

1. Titik ekuilibrium individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan (s_1^*)

$$\begin{aligned}
s_1^* &= \frac{(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)(\mu + \delta)}{\beta\delta(\mu + u_2 + \sigma)} \\
&= \frac{(0.106393)(1.106393)(0.273059)}{(0.18)(1.006393)} \\
&= \frac{0.321424 \cdot 10^{-1}}{0.1811507} = 0.177434
\end{aligned}$$

2. Titik ekuilibrium individu rentan menggunakan masker kesehatan (s_2^*)

$$\begin{aligned} s_2^* &= \frac{u_1 s_1^*}{(\mu + u_2)} \\ &= \frac{(0.1)(0.177434)}{(0.730593 \cdot 10^{-1} + 0.9)} \\ &= \frac{0.0177435}{0.973059} = 0.0182347 \end{aligned}$$

3. Titik ekuilibrium individu laten (e)

$$\begin{aligned} e^* &= \frac{\beta s_1^* i_1^*}{(\mu + \delta)} \\ &= \frac{(0.9)(0.177434)(0.322234)}{(0.273059)} \\ &= \frac{0.0514579}{0.273059} = 0.188449 \end{aligned}$$

4. Titik ekuilibrium individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan (i_1^*)

$$\begin{aligned} i_1^* &= \frac{\mu \left(\beta \delta n(1 - \rho)(\mu + u_2) - d(\mu + \sigma)(d + \sigma)c \right)}{\beta \left((\mu + \sigma)(d + \sigma)c(\mu + u_2) \right)} \\ &= (0.081177) \left(\frac{0.1586433327 - 0.03449069314}{0.03127645406} \right) \\ &= (0.081177)(3.969524146) \\ &= 0.3222343294 \end{aligned}$$

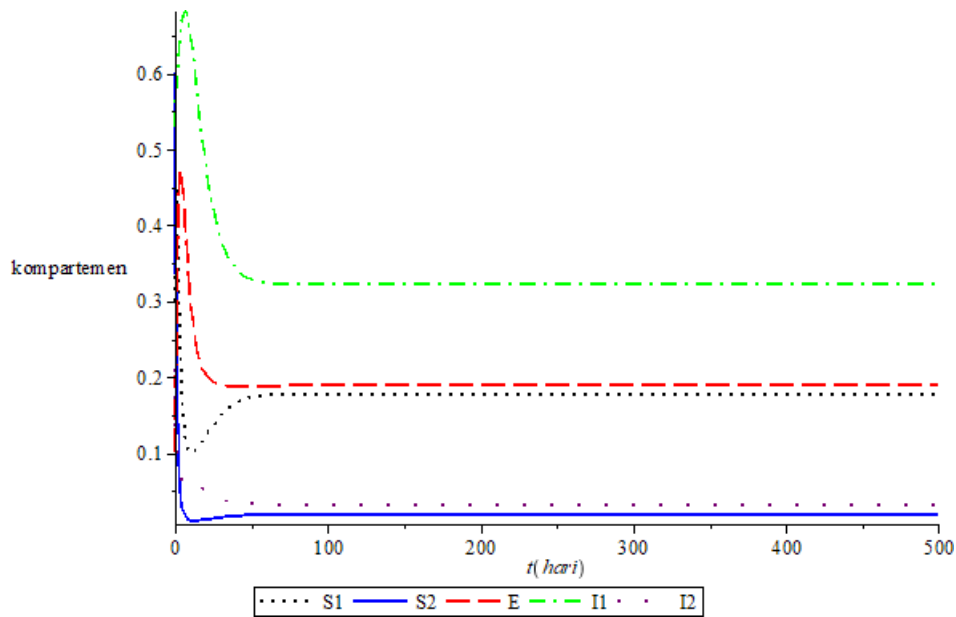
5. Titik ekuilibrium individu terinfeksi menggunakan masker medis (i_2^*)

$$\begin{aligned} i_2^* &= \frac{u_1 i_1^*}{(\mu + u_2 + \sigma)} \\ &= \frac{0.1(0.3222343294)}{1.006392694} \\ &= 0.03201874690 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh titik ekuilibrium endemik sistem (3.10) yaitu

$$E(s_2^*, s_1^*, e, i_1^*, i_2^*) = (0.177434, 0.018235, 0.188449, 0.322234, 0.032019)$$

Hasil simulasi dengan nilai parameter β , δ , u_2 diperbesar dan nilai parameter u_1 dan ρ diperkecil, dengan nilai awal $s_1(0) = 0.3, s_2(0) = 0.6, e(0) = 0.1, i_1 = 0.53, i_2 = 0.21$ disajikan dalam gambar berikut



Gambar 4.2. Simulasi sistem 3.10 titik ekuilibrium endemik

Berdasarkan Gambar 4.2 populasi individu rentan tidak menggunakan masker kesehatan turun hingga hari ke-10, kemudian naik hingga hari ke-50 menuju titik 0.177434 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu rentan menggunakan masker kesehatan menurun hingga hari ke-10 dan naik hingga hari ke-40 menuju titik 0.018235 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu laten menurun hingga hari ke-30 menuju titik 0.188450 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu terinfeksi tidak menggunakan masker kesehatan naik hingga hari ke-10 dan turun hingga hari ke-50 menuju titik 0.322234 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu terinfeksi menggunakan masker kesehatan menurun hingga hari ke-20 menuju titik 0.032019 dan stabil di titik tersebut.

Berdasarkan hal tersebut, maka jumlah populasi untuk penyebaran penyakit MERS-CoV dari masing-masing kompartemen akan stabil pada saat yang bersamaan di titik ekuilibrium endemiknya setelah hari ke-50 dengan

1. Jumlah populasi rentan tidak menggunakan masker medis

$$\begin{aligned} S_1 &= s_1^* \cdot N \\ &= (0.177434)(2000) \\ &= 354.868000 \\ &\approx 355 \text{ individu} \end{aligned}$$

2. Jumlah populasi rentan menggunakan masker medis

$$\begin{aligned} S_2 &= s_2^* \cdot N \\ &= (0.018235)(2000) \\ &= 36.470000 \\ &\approx 36 \text{ individu} \end{aligned}$$

3. Jumlah populasi laten

$$\begin{aligned} E &= e^* \cdot N \\ &= (0.188450)(2000) \\ &= 376.900000 \\ &\approx 377 \text{ individu} \end{aligned}$$

4. Jumlah populasi terinfeksi tidak menggunakan masker medis

$$\begin{aligned} I_1 &= i_1^* \cdot N \\ &= (0.322234)(2000) \\ &= 644.468000 \\ &\approx 644 \text{ individu} \end{aligned}$$

5. Jumlah populasi terinfeksi menggunakan masker medis

$$\begin{aligned} I_2 &= i_2^* \cdot N \\ &= (0.032019)(2000) \\ &= 64.038000 \\ &\approx 64 \text{ individu} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk proporsi populasi individu sembuh dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} 1 &= s_1^* + s_2^* + e^* + i_1^* + i_2^* + r^* \\ r^* &= 1 - (s_1^* + s_2^* + e^* + i_1^* + i_2^*) \\ r^* &= 1 - (0.177434 + 0.018235 + 0.188450 + 0.322234 + 0.032019) \end{aligned}$$

$$r^* = 1 - (0.738372)$$

$$r^* = 0.261628$$

Sehingga jumlah populasi yang sembuh

$$\begin{aligned} R &= r^* \cdot N \\ &= (0.261628)(2000) \\ &= 523.256000 \\ &\approx 523 \text{ individu} \end{aligned}$$

Berdasarkan data dan parameter yang digunakan, diperoleh nilai $R_0 < 1$ sehingga penyakit akan menghilang. Namun, penyakit ini akan menjadi wabah apabila

$$\beta\delta(1-\rho)(\mu+u_2)(\mu+u_2+\sigma) > (u_1+u_2+\mu)(\mu+\delta)(\mu+\sigma)(u_1+u_2+\mu+\sigma)$$

dengan μ adalah laju kelahiran dan kematian alami individu yang diasumsikan sama. Sehingga untuk selanjutnya tindakan pencegahan yang dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$ agar penyakit tidak mewabah adalah sebagai berikut:

1. Mengurangi kontak individu rentan dengan individu terinfeksi (β). Misalnya saat mengalami flu usahakan untuk tidak berada di luar rumah untuk sementara waktu untuk mencegah penularan terhadap orang lain dan hindari menggunakan peralatan makan dan minum yang sama dengan penderita MERS-CoV.
2. Mengurangi laju pelepasan masker kesehatan (u_2) dengan meningkatkan laju menggunakan masker kesehatan (u_1) pada individu rentan dan terinfeksi ketika di luar ruangan atau di tempat ramai.
3. Meningkatkan proporsi individu yang divaksinasi (ρ) di suatu wilayah yang menjadi wabah MERS-CoV.

E. PENUTUP

1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan bentuk model matematis penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi adalah berupa persamaan differensial nonlinear orde satu, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= (1-\rho)\mu N + u_2 S_2 - (\mu + u_1)S_1 - \beta S_1 I_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= u_1 S_1 - (\mu + u_2)S_2 \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S_1 I_1 - (\mu + \delta)E \\ \frac{dI_1}{dt} &= \delta E + u_2 I_2 - (\mu + u_1 + \sigma)I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= u_1 I_1 - (\mu + u_2 + \sigma)I_2 \\ \frac{dR}{dt} &= \sigma I_1 + \sigma I_2 + \rho\mu N - \mu R\end{aligned}$$

Dengan menganalisa sistem persamaan differensial dalam model *non-dimensional* diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_1(s_1, s_2, e, i_1, i_2) = \left(\frac{(1-\rho)(\mu + u_2)}{\mu + u_1 + u_2}, \frac{u_1(1-\rho)}{\mu + u_1 + u_2}, 0, 0, 0 \right), \text{ dilinearisasi dengan}$$

menggunakan matriks Jacobi akan stabil asimtotik jika $R_0 < 1$. Sedangkan untuk titik ekuilibrium endemiknya adalah $E_2 = (s_1^*, s_2^*, e^*, i_1^*, i_2^*)$ dengan

$$\begin{aligned}s_1^* &= \frac{(\mu + \sigma)(\mu + u_1 + u_2 + \sigma)(\mu + \delta)}{\beta\delta(\mu + u_2 + \sigma)} \\ s_2^* &= \frac{u_1 s_1^*}{(\mu + u_2)} \\ e^* &= \frac{\beta s_1^* i_1^*}{(\mu + \delta)}\end{aligned}$$

$$i_1^* = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta \delta n (1 - \rho) (\mu + u_2) - d (\mu + \sigma) (d + \sigma) c}{(\mu + \sigma) (d + \sigma) c (\mu + u_2)} \right)$$

$$i_2^* = \frac{u_1 i_1^*}{(\mu + u_2 + \sigma)}$$

dengan $c = (\mu + \delta)$, $d = (\mu + u_1 + u_2)$, $n = (\mu + u_2 + \sigma)$

Untuk mengetahui apakah terjadi endemik atau tidak di suatu wilayah dapat dilihat dari bilangan reproduksi dasar (R_0). Parameter-parameter yang berpengaruh dalam R_0 yaitu laju kontak infeksi individu rentan dengan individu terinfeksi (β), laju individu laten menjadi individu terinfeksi (δ), proporsi individu yang tidak divaksinasi ($1 - \rho$), laju kelahiran dan kematian alami (μ), laju penggunaan masker kesehatan (u_1), laju pelepasan masker kesehatan (u_2), dan tingkat kesembuhan individu dari penyakit (σ).

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan aplikasi Maple 18, dengan nilai-nilai parameter diambil dari beberapa jurnal yang berkaitan dengan penyebaran penyakit MERS-CoV dan hasil menunjukkan bahwa jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu maka penyakit tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Namun, jika nilai parameter β, δ, u_2 dinaikkan dan nilai parameter ρ dan u_1 diturunkan, bilangan reproduksi dasar menjadi lebih dari satu, maka penyakit akan menyebar, dengan kata lain akan terjadi epidemi sehingga individu terinfeksi dan menularkan akan tetap ada dalam populasi. Namun wabah ini dapat dicegah dengan penggunaan masker kesehatan terhadap individu rentan dan individu terinfeksi dan meningkatkan kekebalan tubuh manusia dengan pemberian vaksin.

2. Saran

Pada skripsi ini telah dibahas pemodelan matematika penyebaran penyakit MERS-CoV dengan penggunaan masker kesehatan dan vaksinasi, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk memodelkan penyebaran penyakit MERS-CoV pada populasi haji dan umroh dengan penggunaan masker kesehatan dan pengaruh obat.

DAFTAR PUSTAKA

- A. L. Funk *et al.*, “Mers-coV at the Animal-Human Interface: Inputs on Exposure Pathways from an Expert-Opinion elicitation,” *Front. Vet. Sci.*, vol. 3, no. October, pp. 1–12, 2016.
- Anwar, M., & Shafira, W. C. (2022). Anomali Peraturan Presiden Nomor 113 tahun 2021 tentang Struktur dan Penyelenggaraan Bank Tanah Ditinjau dari Putusan Mahkamah Konstitusi Nomor 91/PUU-XVIII/2020 tentang Pengujian Formil UU Cipta Kerja. *Jurnal Rechts Vinding: Media Pembinaan Hukum Nasional*, 11(1), 99-115.
- Anwar, M. W., Purwani, A. T., & Murtafiah, N. H. (2022). Peran Penyelenggaraan Taman Pendidikan Al-Quran (Tpa) Terhadap Kemampuan Baca Tulis Al-Quran Di Masyarakat. *Al-Akmal: Jurnal Studi Islam*, 1(1), 22-37.
- A. Rahmasari *et al.*, “Makalah Penyakit MERS,” pp. 1–15, 2014.
- Arifin, M. Z., Saputra, A. A., Taufik, A., Reba, Y. A., & Kusumaningtyas, W. (2022). Pelatihan Mubaligh Atau Da’i Pada IPNU (Ikatan Pelajar Nahdlatul Ulama) Dan IPPNU (Ikatan Pelajar Putri Nahdlatul Ulama) Kabupaten Lampung Tengah. *Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat Radisi*, 2(2), 31-37.
- A. S. Omrani, M. A. Matin, Q. Haddad, D. Al-Nakhli, Z. A. Memish, and A. M. Albarrak, “A family cluster of middle east respiratory syndrome coronavirus infections related to a likely unrecognized asymptomatic or mild case,” *Int. J. Infect. Dis.*, vol. 17, no. 9, pp. e668–e672, 2013.
- B. Yong and L. Owen, “Dynamical transmission model of MERS-CoV in two areas,” *AIP Conf. Proceeding*, vol. 1716, 2016.
- cdc.gov, “Symptoms & Complications MERS.” [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/mers/about/symptoms.html>. [Accessed: 26-Jun-2019].
- C. M. Kwon and J. U. Jung, “Applying discrete SEIR model to characterizing MERS spread in Korea,” *Int. J. Model. Simulation, Sci. Comput.*, vol. 7, no. 4, pp. 1–13, 2016.
- D. Aldila, H. Padma, K. Khotimah, B. Desjwiandra, and H. Tasman, “Analyzing The Mers Disease Control Strategy Through An Optimal Control Problem,” *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 28, no. 1, pp. 169– 184, 2018.
- Diekmann O and Heesterbeck JAP, *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease, Mathematical and Computational Biology*. Wiley:

- E. C.H and D. E. Penny, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, Fourth Edi. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- G. J. Olsder and J. W. van der Woude, *Mathematical System Theory*, 2nd ed. Netherlands: Delft University of Technology, 2003.
- H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, 8th ed. Jakarta, 2004. "Infectious Diseases," *World Health Organization*. [Online]. Available: https://www.who.int/topics/infectious_diseases/en/. [Accessed: 29-Oct- 2019].
- Kurnia, I., Caswita, C., & Suharsono, S. (2022). PENGEMBANGAN MODEL GUIDED INQUIRY UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS MATEMATIS SISWA. *AI-Ikmal: Jurnal Pendidikan*, 1(1), 48-58.
- J. Lamwong, P. Pongsumpun, I. Tang, and N. Wongvanich, "The Lyapunov Analyses of MERS-Cov Transmission in Thailand," vol. 19, no. 2, pp. 112–122, 2019.
- K. B. Blyuss and Y. N. Kyrychko, "On a basic model of a two-disease epidemic," *Appl. Math. Comput.*, vol. 160, no. 1, pp. 177–187, 2005.
- L. Edelstein and Keshet, *Mathematical Models in Biology*. New York:SIAM, 2005.
- L. K. Beay, "Model Penyebaran Middle East Respiratory Syndrome (MERS) dengan Pengaruh Pengobatan," 2017.
- M. Syarifudin, D. Lestari, and H. 'Arifah, "Stability Analysis of Epidemic Model Middle East Respiratory Syndrome-Corona Virus between Indonesia (INA) and Saudi Arabia (KSA)," pp. 67–76.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and M. G. Roberts, "compartmental epidemic models The construction of next-generation matrices for Subject collections The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models," *J. R. Soc. Interface*, vol. 7, no. November 2009, pp. 873–885, 2010.
- Purwani, A. T., Kusumaningtyas, W., & Murtafiah, N. H. (2022). PENGARUH PENGEMBANGAN MODEL PEMBELAJARAN GROUP INVESTIGATIONDALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKATERHADAP KEMAMPUANKOMUNIKASI MATEMATIS SISWA. *AI-Ikmal: Jurnal Pendidikan*, 1(1), 1-18.
- P. Van Den Driessche and J. Watmough, "Reproduction Numbers and Sub- threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, pp. 29–48, 2002.
- P. Van Den Driessche, "Reproduction Numbers of Infectious Disease Models," *Infect. Dis. Model.*, p. 29, 2017.
- R. J. de Groot *et al.*, "Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus (MERS-CoV): Announcement of the Coronavirus Study Group," *J. Virol.*, vol. 87, no. 14, pp.

7790–7792, 2013.

- Rosmaya, R., Anwar, M. W., & Soraya, R. (2022). THE EFFECT OF THE KNISLEY LEARNING MODELS ON STUDENTS' MATHEMATICAL REFLECTIVE THINKING ABILITY IN THE MATERIAL OF TWO VARIABLE LINEAR EQUATION SYSTEMS. *THETA: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(2), 89-97.
- R. W. Kartika, M. Maria, H. Mohamad, M. Shazwan, N. Ayuni, and M. Aiman, "Pengelolaan dan Pencegahan Middle East Respiratory Syndrome (MERS)," vol. 44, no. 4, pp. 2015–2018, 2017.
- S. L. Ross, *Differential Equations*, 3rd ed. New Delhi, 2004.
- Slamet *et al.*, "Pedoman Umum Kesiapsiagaan Menghadapi Middle East Respiratory Syndrom-Corona Virus (MERS-Cov)," Jakarta, 2013.
- Sholikhah, F. F. (2022). Profil Kemandirian Belajar Peserta Didik pada Mata Pelajaran Matematika Selama Pembelajaran Daring. *Al-Ikmal: Jurnal Pendidikan*, 2(1), 1-8.
- Sholikhah, F. F., & Widjajanti, D. B. (2022, December). Humanistic mathematics learning in a scientific approach: What and how to implement it?. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2575, No. 1). AIP Publishing.
- WHO, "MERS Situation Update August 2019," 2019. [Online]. Available: <http://www.emro.who.int/health-topics/mers-cov/mers-outbreaks.html>. [Accessed: 03-Oct-2019].
- WHO, "WHO MERS Global Summary and Assessment of Risk," 2018. [Online]. Available: https://www.who.int/csr/disease/coronavirus_infections/risk_assessment-august-2018.pdf. [Accessed: 25-Apr-2019]. "Infografis Haji Indonesia Tahun 1949 sd 2018," Jakarta.
- Y. M. Arabi *et al.*, "Clinical course and Outcomes of Critically Ill Patients With Middle East respiratory Syndrome Coronavirus Infection," *Ann. Intern. Med.*, vol. 160, no. 6, pp. 389–397, 2014.S